പൂർണസംഖ്യകൾ

Integers

പൂജ്യം, ധനപൂർണസംഖ്യകൾ (1, 2, 3, 4, ...), ഋണപൂർണസംഖ്യകൾ (–1, –2, –3, –4...) എന്നിവ ഉൾപ്പെട്ട സംഖ്യാഗണം. എണ്ണുക എന്ന ആശയത്തിൽനിന്നാണ് പൂർണസംഖ്യകൾ ഉദ്ഭവിച്ചത്. പൂർണസംഖ്യകൾ ഉദ്ഭവിക്കുന്നതിന് മുമ്പ് ഏകൈക സാംഗത്യം ഉപയോഗിച്ചാണ് എണ്ണൽ പ്രവർത്തനം നിർവഹിച്ചിരുന്നത്. പത്ത് ആടുകളുമായി പുറത്തുപോകുന്ന ആട്ടിടയൻ പത്ത് യോജിപ്പ് ചിഹ്നങ്ങളുള്ള ഒരു ദണ്ഡും എടുത്തുകൊണ്ടാണ് പോയിരുന്നത്. തിരിച്ചുവരുമ്പോൾ ദണ്ഡിലുള്ള ഓരോ ചിഹ്നത്തിനും സംഗതമായ ആട് ഉണ്ടോ എന്ന് പരിശോധിക്കും. കാലക്രമേണ പൂർണസംഖ്യകളുടെ സങ്കല്പം ഉണ്ടായി. വിരലുകൾ ഉപയോഗിച്ച് എണ്ണിയിരുന്നു എന്ന് അനുമാനിക്കാം. സംസ്കൃതത്തിൽ ഏകം, ദ്വേ, തീണി, ചത്വാരി, പഞ്ച എന്നാണ് 1, 2, 3, 4, 5 എന്നീ സംഖ്യകളെ നാമകരണം ചെയ്തിട്ടുള്ളത്. പഞ്ച എന്നാൽ വിസ്തൃതം എന്നും അർഥമുണ്ട്. വിരലുകൾ ഉയർത്തി ഒന്ന്, രണ്ട് എന്ന് എണ്ണുമ്പോൾ '5' ആകുമ്പോൾ പാണിതലം വിസ്തൃതമാകുന്നു, ദേവനാഗരിയിൽ ५ എന്നും റോമൻ സങ്കേതത്തിൽ V എന്നും വിസ്തൃതമായ കൈതലത്തിന്റെ രൂപത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

ആദ്യം എണ്ണുന്നതിൽനിന്നു തുടങ്ങിയ സംഖ്യയുടെ അമൂർത്താത്മകമായ നിർവചനം പിന്നീടാണ് ഉടലെടുത്തത്. പല തരത്തിൽ സംഖ്യകൾ പല സംസ്കാരങ്ങളിലും കൈകാര്യം ചെയ്യപ്പെട്ടു. ഗ്രീക്കുകാർക്ക് ജ്യാമിതീയമായ സമീപനമാണ് ഉണ്ടായിരുന്നത്. മായന്മാരുടെ സംസ്കാരത്തിൽ 20 ആധാരമായ സംഖ്യാസമ്പ്രദായം ഉണ്ടായിരുന്നു. ബാബിലോൺ, ഈജിപ്ത് എന്നീ സ്ഥലങ്ങളിൽ 60 അടിസ്ഥാനമാക്കിയ സംഖ്യാസമ്പ്രദായം ഉണ്ടായിരുന്നു. എന്നാലും ഭാരതീയ ദശാംശ സംഖ്യാസമ്പ്രദായമാണ് സാർവത്രികമായി അംഗീകരിക്കപ്പെട്ടത്.

പൂർണസംഖ്യകളുടെ പഠനത്തിൽനിന്നാണ് സംഖ്യാസിദ്ധാന്തം (Number theory) ഉടലെടുത്തത്. ആദ്യം അമൂർത്താത്മകമായ നിർവചനത്തെക്കുറിച്ചാണ് വിശദീകരിക്കേണ്ടത്. ആറ് എന്ന സംഖ്യ ആറു അംഗങ്ങളുള്ള എല്ലാ ഗണങ്ങളുടെയും അമൂർത്തമായ ഒരു സങ്കല്പമാണ്. ഇതിൽ സംഖ്യമാത്രമേ പരിഗണനയിൽ ഉള്ളൂ. ഗണങ്ങളുടെ അംഗങ്ങളുടെ സ്വഭാവമോ സവിശേഷതകളോ ഇല്ല. സംഖ്യാസിദ്ധാന്തത്തിൽ ഇത്തരം സംഖ്യയെക്കുറിച്ചാണ് പഠിക്കുന്നത്.

പൂർണസംഖ്യകളാണ് ഇവിടെ ആധാരം. അതിൽ സങ്കലനം, വ്യവകലനം, ഗുണനം, ഹരണം എന്നീ ക്രിയകൾ നിർവചിക്കുന്നു. വ്യവകലനംമൂലം ഋണ പൂർണസംഖ്യകളും ഹരണംമൂലം പരിമേയ സംഖ്യകളും കിട്ടുന്നു.

ചില പ്രധാന സങ്കല്പനങ്ങൾ പരിഗണിക്കാം. a, b രണ്ട് പൂർണസംഖ്യകളാണെന്നും b>0 എന്നും സങ്കല്പിക്കുക. എങ്കിൽ $a = qb + r\ (0 \le r < b)$ എന്നാകത്തക്കവിധം q, r എന്നീ പൂർണസംഖ്യകൾ ഉണ്ട്. ഇതാണ് ഹരണതത്ത്വം. ഇവിടെ a എന്ന സംഖ്യയെ b എന്ന സംഖ്യകൊണ്ട് ഹരിക്കുന്ന പ്രക്രിയയാണ് വിവരിക്കുന്നത്. r = 0 ആകുന്ന അവസരത്തിൽ b എന്ന സംഖ്യ a യുടെ ഘടകം ആണ് എന്നുപറയുന്നു.

p > 1 എന്നു സങ്കല്പിക്കുക. 1, p ഇവയല്ലാതെ വേറെ ഘടകങ്ങൾ p യ്ക്ക് ഇല്ലെങ്കിൽ p യെ അഭാജ്യസംഖ്യ എന്നുപറയുന്നു.

N ഒരു പൂർണസംഖ്യയെങ്കിൽ $N = p_1 p_2 \ldots p_m$ എന്നാകത്തക്കവിധം $p_1, p_2, \ldots, p_m$ എന്നീ അഭാജ്യ സംഖ്യകൾ ഉണ്ട്. ഇത് പൂർണസംഖ്യകളെ സംബന്ധിച്ച ഒരു അടിസ്ഥാന പ്രമാണമായി അംഗീകരിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്.

ഒരു നിർദിഷ്ട സംഖ്യ N നെക്കാൾ ചെറുതായി എത്ര അഭാജ്യസംഖ്യകൾ ഉണ്ട്? ഈ ചോദ്യത്തിന് കൃത്യമായ ഉത്തരം ലഭ്യമല്ല എങ്കിലും X നെക്കാൾ ചെറുതായ അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ എണ്ണത്തെ സംബന്ധിക്കുന്ന നിരവധി ഏകദേശ കണക്കുകൾ ലഭ്യമാണ്. അതിൽ ഒന്നാണ്

$\lim_{X \to \infty} \frac{\pi(X)}{(X/\log X)} = 1$ എന്നത്. ഇവിടെ $\pi(X)$ എന്നത് X–നെക്കാൾ ചെറുതായ അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ എണ്ണത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

താഴെയുള്ള പട്ടിക ഇതിനെ വിശദീകരിക്കുന്നു.

X	$\pi(X)$	X / log x	$\pi(X) / (X/\log X)$
1000	168	145	1.159
10,000	1,229	1,086	1.132
100,000	9,592	8,686	1.104
1000,000	78,498	72,382	1.084

ഒരു പൂർണസംഖ്യ അതൊഴിച്ചുള്ള അതിന്റെ എല്ലാ ഘടകങ്ങളുടെയും സങ്കലനഫലത്തിന് തുല്യമെങ്കിൽ അതിനെ പരിപൂർണസംഖ്യ എന്ന് പറയുന്നു. ഉദാഹരണമായി

1, 2, 3 ഇവ 6–ന്റെ ഘടകങ്ങളാണ്. 1+2+3= 6 എന്നുകിട്ടും.

1, 2, 4, 7, 14 ഇവ 28–ന്റെ ഘടകങ്ങളാണ്.

1+2+4+7+14=28. അതുകൊണ്ട് 6, 28 ഇവ പരിപൂർണസംഖ്യകളാണ്.

രണ്ട് പൂർണസംഖ്യകളിൽ ഒന്നു മറ്റതിന്റെ ഘടകങ്ങളുടെ (സംഖ്യ ഒഴിച്ചുള്ള) സങ്കലനഫലത്തിനു തുല്യമായാൽ, സൗഹൃദപൂർവമായ സംഖ്യകൾ എന്ന് പറയുന്നു.

1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55,110 ഇവ 220–ന്റെ ഘടകങ്ങളാണ്. 1, 2, 4, 71, 142 ഇവ 284–ന്റെ ഘടകങ്ങളാണ്. കൂടാതെ 1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110= 284 എന്നും. 1+2+4+71+142=220 എന്നും കിട്ടുന്നു. അങ്ങനെ 284ഉം 220ഉം സൗഹൃദപൂർവമായ സംഖ്യകളാണ്.

സംഖ്യാസിദ്ധാന്തങ്ങളിലുള്ള ചില പ്രസിദ്ധ പ്രശ്നങ്ങൾ

1. പരിപൂർണസംഖ്യകളെപ്പറ്റി മുമ്പ് പ്രസ്താവിച്ചിരുന്നു. ഇതുവരെ (2017) 50–ൽ താഴെ പരിപൂർണസംഖ്യകൾ മാത്രമേ കണ്ടുപിടിക്കപ്പെട്ടിട്ടുള്ളൂ. 6, 28, 496, 8128, 33550336 എന്നിവ പരിപൂർണസംഖ്യകളാണ്.

48–ാമത്തെ പരിപൂർണസംഖ്യയ്ക്ക് 3,48,50,340 അക്കങ്ങളുണ്ട്. പരിപൂർണസംഖ്യകൾ കണ്ടെത്താനുള്ള ശ്രമങ്ങൾ മെഴ്സെന്നെ അഭാജ്യസംഖ്യകൾ കണ്ടെത്തുന്ന പ്രവർത്തനവുമായി ബന്ധപ്പെട്ടാണ് നടന്നുവരുന്നത്.

2. '2' വ്യത്യാസമുള്ള തുടർച്ചയായ അഭാജ്യസംഖ്യകളെ ഇരട്ട അഭാജ്യസംഖ്യ എന്നുപറയാം. അനന്തമായ ഇരട്ട അഭാജ്യസംഖ്യകൾ ഉണ്ട് എന്ന് ഊഹിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്. പക്ഷേ തെളിയിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല.

3. ഗോൾഡ്ബാക്കിന്റെ ഊഹം: ജർമനിയിലെ ഗോൾഡ്ബാക്ക് 1742–ൽ 4–നെക്കാൾ വലുതായ ഓരോ ഇരട്ട പൂർണസംഖ്യയെയും രണ്ട് അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ സങ്കലനഫലമായി എഴുതാൻ സാധിക്കുമെന്നും. 20 അക്കങ്ങളുള്ള സംഖ്യകൾവരെ പരീക്ഷിച്ച് ശരിയാണെന്ന് കണ്ടുപിടിക്കുകയും ചെയ്തിട്ടുണ്ട്.

ഉദാഹരണമായി,

6 = 3+3

8 = 3+5

10 = 5+5

പക്ഷേ ഈ പ്രസ്താവന തെളിയിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല.

4. കൊല്ലാട്സിന്റെ പ്രശ്നം

ഏതെങ്കിലും സംഖ്യ എടുക്കുക. ഇരട്ട സംഖ്യയാണെങ്കിൽ 2 കൊണ്ട് ഹരിക്കുക. ഒറ്റസംഖ്യയാണെങ്കിൽ 3 കൊണ്ട് ഗുണിച്ച് 1 കൂട്ടുക. ഇത് തുടർന്ന് ചെയ്തുകൊണ്ട് പോകുക. അവസാനം കിട്ടുന്നത് 4, 2, 1 എന്നായിരിക്കും.

ഉദാഹരണം, 7–ൽ തുടങ്ങുക. അടുത്ത ക്രിയയിൽ 22 ആകും. തുടർന്ന് 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

ഇത് 19 അക്കങ്ങളുള്ള സംഖ്യകളിൽ വരെ പരീക്ഷിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്. എന്നാലും തെളിയിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല.

(ഡോ. എസ്. മാധവൻ)